Certain LCM-stable modules (Algebra and Computer Science)

金光, 三男

数理解析研究所講究録
第1873巻 2014年 102-105

Certain LCM-stable modules

中部大学・現代教育学部　金光三男
Mitsuo Kanemitsu
College of Contemporary Education
Chubu University

体上のベクトル空間 ($\neq \{0\}$) より広い概念である, 整域上の自由加群は, 平坦 (flat) 加群である. これより広い概念に整域上の LCM-stable 加群がある.

この講究録では, ネーター的整域上の LCM-stableness および LCM-stable module of level n の基本性質について考察しよう.

いくつかの記号に関する準備をする.

まず R は Noetherian integral domain でその商体を K とする. L を K の有限次代数拡大体とし, その 0 でない元を $\alpha \in L$ とする. $d = [K(\alpha) : K]$, $B = R[\alpha] \cap R[\alpha^{-1}]$ とおく.

A/R で L と R の中間環 A を表し, 環の拡大 A/R と呼ぶ.

更に $\alpha \in L$ に対して, α の多項式 $\phi_\alpha(X) = X^d + \eta_1 X^{d-1} + \cdots + \eta_d$ を α の monic である K 上最小多項式とする. $I_{B,\alpha} = \{b \in B \mid b\alpha \in B\}$ は B のイデアルをなし α の B における**分母イデアル**と呼ぶ. $J_{B,\alpha} = I_{B,\alpha} + \alpha I_{B,\alpha}$ とおき, $I_a = (R :_R aR)$, $I_{[\alpha]} = \cap_{i=1}^{d} (R :_R \eta_i)$ とする.

また, $\mathrm{Dp}_1(R) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{depth}\ R_p = 1\}$ と略記する.

先に述べたように, M が flat R-module なら良く知られているように, M は LCM-stable R-module である (例えば, [A]). ここで, M が LCM-stable R-module の定義は次の通りである.

定義 1. M を R-module とする. $\forall a, b \in R$ に対して, $(aR \cap bR)M = aM \cap bM$ が成立するとき, M は **LCM-stable R-module** という.

F.Richman ([R]) は, 次の結果を証明した.

R がネーター的整域とし, A を R の overring とする. このとき, A が R 上 flat であることは, A が R 上 LCM-stable であることに同値である.

LCM-stable R-module で flat R-module でない例は ([U]) に挙げてある.

$R = k[s,t,u]$ は体 k 上の三変数の多項式環とする．このとき，$M = R[X]/(sX^2 + tX + u)$ は LCM-stable R-module だが，flat R-module ではない．

まず最初に LCM-stable に関する先行研究のまとめをしてみよう．

(1) 環の拡大 A/R が LCM-stable R-module のとき，$P \cap R \in \mathrm{Dp}_1(R)$ ([SY]).

(2) 上でも述べたが，環の拡大 A/R が flat R-module とする．このとき，A/R は LCM-stable R-module であるが，逆は必ずしも成立しない ([OY]).

(3) 環の拡大 A/R に対して．A が LCM-stable R-module であることは，$I_\lambda A = I_{A,\lambda}$ for $\forall\lambda \in K$ であることに同値である．
この場合，$P \cap R \in \mathrm{Dp}_1(R)$ for $\forall P \in \mathrm{Dp}_1(A)$ が成立する ([KSY]).

(4) 環の拡大 B/R が birational extension とする．B/R が LCM-stable R-module なら，$P \cap R \in \mathrm{Dp}_1(R)$ for any $P \in \mathrm{Dp}_1(B)$．逆は必ずしも成立しない ([KSY]).

ここで，anti-integral element of degree d over R ([KSY], [OY]) の定義を復習しよう．

R の商体 K の有限次代数拡大体 L の元 α の K 上の monic 最小多項式は次数が d で $\phi_\alpha(X) = X^d + \eta_1 X^{d-1} + \cdots + \eta_d$ とする．$\pi\ :\ R[X] \longrightarrow R[\alpha]$ を R-代数の準同型写像で X を α に移すとする．
このとき，α が **anti-integral element of degree** d over R とは，$\mathrm{Ker}(\pi) = I_{[\alpha]}\pi_\alpha(X)R[X]$ のときをいう．α が R 上 anti-integral element のとき，$R[\alpha]$ は R の **anti-integral extension** という．

また下記の (7) に出てくる super-primitive element の定義 ([KSY], [OY]) も復習しておく．
$J_{[\alpha]} = I_{[\alpha]}c(\phi_{[\alpha]}(X))$ とする．ここで，$c(\phi_{[\alpha]}(X))$ は R の商体 K における $\phi_{[\alpha]}(X)$ の係数 $1, \eta_1, \cdots, \eta_d$ によって生成される分数イデアルとする．
元 α が **super-primitive element of degree** d over R とは，$J_{[\alpha]} \not\subset p$ for all $p \in \mathrm{Dp}_1(R)$.

(5) α を anti-integral element of degree d over R とする．R-module $B = R[\alpha] \cap R[\alpha^{-1}] \cong R \oplus I_{[\alpha]}^{d-1}$ とおく．$I_{[\alpha]}$ が R の可逆イデアルでないとすると，B/R は LCM-stable ではない ([KSY]).

(6) α が anti-integral element over R とする．$I_{B,\alpha}$ が B の可逆イデアルで A が LCM-stable R-module なら，A は flat R-module ([KSY2]).

(7) α が R 上 super-primitive element とする．もし $I_{B,\alpha}$ が B の可逆イデアルで A が LCM-stable R-module なら，A は flat R-module ([KSY2]).

次に LCM-stable R-module of level n について, [K] に掲載される予定 (accept 済み) の研究集会で口頭発表した内容について説明をしよう.

定義 2. R を Noetherian domain, A/R を環の拡大 (必ずしも overring とは限らない) とする.

このとき, A が **LCM-stable R-module of level n** とは, 任意の $n+2$ 個の R の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n, x, y$ に対して, $((a_1, a_2, \cdots, a_n, x)R \cap (a_1, a_2, \cdots, a_n, y)R)A = (a_1, a_2, \cdots, a_n, x)A \cap (a_1, a_2. \cdots, a_n, y)A$ が成立するときをいう.

$n = 0$ の場合は, 先に述べた A が LCM-stable R-module のことである.

$m \leqq n$ の場合, A が LCM-stable R-module of level n なら, A が LCM-stable R-module of level m となる.

正則列と深さの定義の復習をしよう (例えば, [M]).

A を環とし, M を A 加群とする. A の元の列 $a_1, \cdots, a_n$ が $M-$ **正則列** (M-sequence) とは, 次の 2 条件が満たされるときである.

(1) a_1 が $M-$ 正則, a_2 が $(M/a_1M)-$ 正則, $\cdots$, a_n が $(M/\sum_1^{n-1} a_iM)-$ 正則,

(2) $M/\sum_1^n a_iM \neq 0$.

$M-$ 正則列の元を並べ替えると $M-$ 正則列でなくなるときもある ([M]).

また環 A のイデアル I と有限 A 加群 M で $M \neq IM$ としたとき, I の中の極大 M 正則列の長さを M の $\mathbf{I-depth}$ という. この長さは一定であり, depth (I, M) で表す. それを n とすれば, depth $(I, M) = \inf\{\ i \mid \mathrm{Ext}_A^i(A/I, M) \neq 0\}$ (言い換えると, $\mathrm{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0$, $\mathrm{Ext}_A^j(A/I, M) = 0$ for $i < n$). 特に局所環 (A, m) の depth (m, M) を単に M の**深さ**といい, $\mathrm{depth}_A M$ または depth M と書く ([M]).

定理. A が LCM-stable R-module of level n で, $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ が R-正則列とする. このとき, $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ は A-正則列となる.

この証明の概略を述べよう. n に関する数学的帰納法で証明する. $n = 0$ の場合も同様に示すことができる. $n - 1$ まで正しいとする. $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ は R-正則列だから, 数学的帰納法の仮定より A-正則列である. $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ は R-正則列だから, $((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) :_R a_{n+2}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})R$. 一方, A/R が LCM-stable module of level n だから, $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2} \in R$ に対して, $\mathrm{Tor}_1^R(R/(a_1, a_2, \cdots, a_{n+2})R, A) = (0)$. これを使用すると $((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) :_A a_{n+2})A = ((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) :_R a_{n+2})A = (a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})A$. (即ち, $((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})R : a_{n+2}) \otimes_R A \longrightarrow ((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) :_A a_{n+2})$ は surjective). よって, $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ は A-正則列である.

この定理の応用を幾つか述べよう.

A が LCM-stable R-module of level n で, $P \in \mathrm{Spec}(A)$ で depth $A_P = n + 1$ とする. このとき $p = P \cap R$ に対して, depth $R_p \leqq n + 1$ が成立する. 更に, A が R 上

integral extension のときは, 任意の depth $R_p = n+1$ となる R の素イデアル p に対して, depth $A_P = n+1$ で $P \cap R = p$ となるような A の素イデアルが存在する. 特に, depth $R_p = 1$ でありことは deapth $A_P = 1$ と同値である.

参考文献

[A] T.Akiba, LCM-stableness, Q-stableness and flatness, *Kobe J. Math.*, **2** (1985), 67-70.

[K] M.Kanemitsu, LCM-stable module of level n, *to appear in JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications.*

[KSY] M.Kanemitsu, J.Sato and K.Yoshida, Integrality and LCM-stableness of simple extensions over Noetherian domains, *Communications in Algebra*, vol. **24** no.10 (1996), 3229-3235

[KSY2] M.Kanemitsu, T.Sugatani and K.Yoshida, Flatness and LCM-stability of simple extensions over Noetherian domains, *Communications in Algebra*, **27(5)**, (1999), 2187-2191.

[M] 松村英之, 可換環論, 共立出版 1980 年.

[OY] S.Oda and K.Yoshida, Simple extensions with the minimum degree relations of integral domains, *Lecture note in pure and applied mathematics*, vol.**253**, *Chapman and Hall/CRC*, 2007 年.

[R] F.Richman, Generalized quotient rings, *Proc. Math. Soc.* **16** (1965), 794-799.

[SY] J.Sato and K.Yoshida, The LCM-stability on polynomial extensions, *Math. Rep. Toyama Univ.*, **10** (1987) 75-84.

[U] H.Uda, Incomparability in ring extensions, *Hiroshima Math. J.*, **9** (1979), 451-463.